A # II колоквијум из Математике 1 **A**

10. јануар 2011.

презиме и име студента	број индекса	број поена на I колоквијуму (од 100)

1. *(20 поена)* Испитати конвергенцију низа (a_n) чији је општи члан задат са

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{n^5 - 2n + 2}} + \frac{1}{\sqrt[5]{n^5 - 2n + 3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[5]{n^5 + 3n}}$$

и одредити граничну вредност $\lim_{n\to\infty} a_n$ ако постоји.

2. *(20 поена)* Дата је функција

$$f\colon x \mapsto 2x \cdot e^{\frac{1}{2x}}\,.$$

а) Одредити област дефинисаности (домен) D_f ове функције.

б) Испитати понашање функције на рубовима домена D_f (одредити граничне вредности и на основу њих извести закључке везане за асимптоте).

3. *(20 поена)* Дата је функција

$$g\colon x \mapsto \ln(\cos 3x - x)\,.$$

а) Одредити Маклоренов полином $T_3(x)$ (степена 3) функције $g(x)$.

б) Одредити граничну вредност

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) + 5x^2 + x}{x^3}\,.$$

4. *(40 поена)* Испитати ток и скицирати график функције

$$y(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)\,.$$

Б **II колоквијум из Математике 1** **Б**

10. јануар 2011.

презиме и име студента | **број индекса** | **број поена на I колоквијуму (од 100)**

1. *(20 поена)* Испитати конвергенцију низа (a_n), $n > 2$, чији је општи члан задат са

$$a_n = \left(\frac{n^2 + 2n - 4}{(n-2)(n+2)} \right)^{\dfrac{2n^2+3}{3n-2}}$$

и одредити граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ако постоји.

2. *(20 поена)* Дата је функција

$$f\colon x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}}{\ln x}\,.$$

а) Одредити област дефинисаности (домен) D_f ове функције.

б) Испитати понашање функције на рубовима домена D_f (одредити граничне вредности и на основу њих извести закључке везане за асимптоте).

3. *(20 поена)* Дат је полином

$$P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 12x - 11.$$

а) Представити полином $P(x)$ по степенима од $(x-2)$.

б) Одредити диференцијал $\mathrm{d}P(0)$.

в) Одредити граничну вредност

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P''(x)\cdot\cos 2x}{x^3}\,.$$

4. *(40 поена)* Испитати ток и скицирати график функције

$$y(x) = \frac{e^{-x}}{x-2}\,.$$

Г II колоквијум из Математике 1 Г

10. јануар 2011.

презиме и име студента | **број индекса** | **број поена на I колоквијуму (од 100)**

1. *(20 поена)* Испитати конвергенцију низа (a_n), $n \geqslant 2$, чији је општи члан задат са

$$a_n = \left(\frac{1+2n-n^2}{(1-n)(1+n)}\right)^{\dfrac{n^2+n}{2+n}}$$

и одредити граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ако постоји.

2. *(20 поена)* Дата је функција

$$f\colon x \mapsto \frac{2x}{\ln 2x}\,.$$

а) Одредити област дефинисаности (домен) D_f ове функције.

б) Испитати понашање функције на рубовима домена D_f (одредити граничне вредности и на основу њих извести закључке везане за асимптоте).

3. *(20 поена)* Дата је функција

$$g\colon x \mapsto (x^2+1)\cdot \sin(3-x).$$

а) Апроксимирати функцију $g(x)$ Тејлоровим полиномом $T_3(x)$ (степена 3) у околини тачке $x = 3$.

б) Одредити диференцијал $\mathrm{d}g$.

в) Одредити граничну вредност

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)+8x^2+2x-5}{x^3}\,.$$

4. *(40 поена)* Испитати ток и скицирати график функције

$$y(x) = e^{-x}(1+x^2)\,.$$

Д

II колоквијум из Математике 1

Д

10. јануар 2011.

______________________________ презиме и име студента

______________ број индекса

______________ број поена на I колоквијуму (од 100)

1. *(20 поена)* Испитати конвергенцију низа (a_n) чији је општи члан задат са

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+3n}}$$

и одредити граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ако постоји.

2. *(20 поена)* Дата је функција

$$f\colon x \mapsto (x-1)\cdot e^{\frac{1}{x-3}}\,.$$

а) Одредити област дефинисаности (домен) D_f ове функције.

б) Испитати понашање функције на рубовима домена D_f (одредити граничне вредности и на основу њих извести закључке везане за асимптоте).

3. *(20 поена)* Дата је функција

$$g\colon x \mapsto \sqrt{1-\sin(3x)}\,.$$

а) Одредити Маклоренов полином $T_3(x)$ (степена 3) функције $g(x)$.

б) Одредити граничну вредност

$$\lim_{x\to 0} \frac{16g(x)+18x^2+24x-16}{x^3}\,.$$

4. *(40 поена)* Испитати ток и скицирати график функције

$$y(x) = \frac{x+2}{1-\ln(x+2)}\,.$$

Резултати Г групе са II колоквијума из Математике 1

1. Како се добија $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-2}$, то низ a_n конвергира.

2. а) $D_f = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

б) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow$ нема вертикалну асимптоту $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ има вертикалну асимптоту $x = \frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ нема десну хоризонталну асимптоту.

$k = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow$ нема десну косу асимптоту.

Леву хоризонталну и леву косу асимптоту нема јер $-\infty$ није у домену D_f.

3. а) $g(x) = (x^2+1)\sin(3-x) \Rightarrow g(3) = 0$;
$g'(x) = 2x\sin(3-x) - (x^2+1)\cos(3-x) \Rightarrow g'(3) = -10$;
$g''(x) = (1-x^2)\sin(3-x) - 4x\cos(3-x) \Rightarrow g''(3) = -12$;
$g'''(x) = -6x\sin(3-x) + (x^2-5)\cos(3-x) \Rightarrow g'''(3) = 4$;
$T_3(x) = -10(x-3) - 6(x-3)^2 + \frac{2}{3}(x-3)^3$.

б) Диференцијал је $\mathrm{d}g = g'(x)\,\mathrm{d}x = \big(2x\sin(3-x) - (x^2+1)\cos(3-x)\big)\,\mathrm{d}x$.

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)+8x^2+2x-5}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)\sin(3-x)+8x^2+2x-5}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x^2})\cdot\frac{\sin(3-x)}{x} + \frac{8}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} = 0$
(јер је $-1 \leqslant \sin(3-x) \leqslant 1$, па сви разломци теже ка 0 кад $x \to +\infty$).

4. $y(x) = e^{-x}(1+x^2)$.
1° $D_y = (-\infty, +\infty)$.
2° Нема нуле, $y(x) > 0$ за свако $x \in D_y$, пресек са y-осом је $Y(0,1)$.
3° $y(x)$ монотоно опадајућа на целом D_y (видети 5°) није ни парна, ни непарна, ни периодична.
4° Нема прекида у D_y $\Rightarrow y(x)$ нема вертикалних асимптота.
$\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = +\infty \Rightarrow$ нема леву хоризонталну асимптоту.
$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\text{л.п.}}{=}} \ldots \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\text{л.п.}}{=}} \ldots = 0 \Rightarrow$ има десну хоризонталну асимптоту $y = 0 \Rightarrow$ нема десну косу асимптоту.
$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{y(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ нема леву косу асимптоту.
5° $y'(x) = e^{-x}(-x^2+2x-1) = -e^{-x}(x-1)^2 \Rightarrow y(x)$ је опадајућа ($\searrow$) и нема лок. екстремних вредности.
6° $y''(x) = e^{-x}(x^2-4x+3) = e^{-x}(x-1)(x-3) \Rightarrow y(x)$ је конвексна ($\cup$) на $(-\infty, 1)$ и на $(3, +\infty)$, а конкавна на $(1,3)$ и превојне тачке су $P_1(1\frac{2}{e})$ и $P_2(3, \frac{10}{e^3})$.