I Писмени испит из математике 1 I

3. октобар 2009.

I група

презиме и име студента **број индекса**

1. У зависности од параметара $a, b \in \mathbb{R}$ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -3 \\ 2x & + & ay & + & 5z & = & 2 \\ -3x & - & 3y & - & 6z & = & b. \end{array}$$

2. Дате су праве $p\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z+4}{1}$ и $q\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+5}{-2} = \dfrac{z+3}{\lambda}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.

а) Одредити вредност реалног параметра λ тако да се праве p и q секу.

б) За вредност λ одређену у делу под а) одредити пресечну тачку T правих p и q, меру оштрог угла φ који граде праве p и q, као и једначину равни π коју одређују ове праве.

3. Нека је $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^n + A \sin \dfrac{n\pi}{3}$, $A \in \mathbb{R}$.

а) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n).

б) Одредити вредност параметра A тако да низ (a_n) буде конвергентан.

4. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}}$.

I Писмени испит из математике 1 I

3. октобар 2009.

I група

презиме и име студента **број индекса**

1. У зависности од параметара $a, b \in \mathbb{R}$ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -3 \\ 2x & + & ay & + & 5z & = & 2 \\ -3x & - & 3y & - & 6z & = & b. \end{array}$$

2. Дате су праве $p\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z+4}{1}$ и $q\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+5}{-2} = \dfrac{z+3}{\lambda}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.

а) Одредити вредност реалног параметра λ тако да се праве p и q секу.

б) За вредност λ одређену у делу под а) одредити пресечну тачку T правих p и q, меру оштрог угла φ који граде праве p и q, као и једначину равни π коју одређују ове праве.

3. Нека је $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^n + A \sin \dfrac{n\pi}{3}$, $A \in \mathbb{R}$.

а) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n).

б) Одредити вредност параметра A тако да низ (a_n) буде конвергентан.

4. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}}$.

Решења испита из математике 1

1. Степенасти облик овог система је

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & -3 \\ & & (a-2)y & + & z & = & 8 \\ & & & & 0 & = & b-9 \end{array},$$

па имамо:
1° за $b \neq 9$ систем нема решења.
2° за $b = 9$ систем има вишеструко решење $(x, y, z) = \big((2a-5)t - 19, t, (2-a)t + 8\big)$.

Напомена. Задатак је могуће радити и помоћу детерминанти. Тада се добија: $\Delta = 0$, $\Delta_x = 18a - 45 + 5b - 2ab$, $\Delta_y = 9 - b$, $\Delta_z = ab + 18 - 2b - 9a$.

2. а) Потребан услов да се непаралелне праве $\dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$ и $\dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$ секу јесте

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

За праве p и q добијамо $\begin{vmatrix} (-2)-2 & 5-(-5) & (-4)-(-3) \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 6\lambda + 6 = 0$, одакле је $\lambda = -1$.

б) Угао φ између правих p и q које се секу је дат са $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{v}_q|}$. Како су вектори правца ових правих $\vec{v}_p = (1, -4, 1)$ и $\vec{v}_q = (2, -2, -1)$ добијамо да је

$$\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q = (1, -4, 1) \cdot (2, -2, -1) = 2 + 8 - 1 = 9, \quad |\vec{v}_p| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}, \quad |\vec{v}_q| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3,$$

па је $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, што повлачи да је угао између правих $\varphi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$.
Раван π која садржи праве p и q има вектор нормале $\vec{n}_\pi$ који је нормалан и на праве p и q, па је $\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_p$ и $\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_q$, те можемо узети да је $\vec{n}_\pi = \frac{1}{3}\vec{v}_p \times \vec{v}_q$, тј.

$$\vec{n}_\pi = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(6\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}) = (2, 1, 2).$$

Раван π садржи тачку $P(-2, 5, -4)$ са праве p, па је $\alpha\colon 2\cdot\big(x-(-2)\big) + 1\cdot(y-5) + 2\cdot\big(z-(-4)\big) = 0$, тј. $2x + y + 2z + 7 = 0$.

Део под а) смо могли да решимо тако што бисмо тражили пресечну тачку правих p и q. Како је права p у канонском облику $p\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z+4}{1} = t$, она је у параметарском облику

$$x = -2 + t, \quad y = 5 - 4t, \quad z = -4 + t,$$

док је $q\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+5}{-2} = \dfrac{z+3}{\lambda} = s$ у параметарском облику

$$x = 2 + 2s, \quad y = -5 - 2s, \quad z = -3 + \lambda s.$$

Пресечна тачка T припада обема правама па за њу важи

$$x = -2 + t = 2 + 2s, \qquad y = 5 - 4t = -5 - 2s, \qquad z = -4 + t = -3 + \lambda s.$$

Из I и II једначине добијамо да је $t = 2$ и $s = -1$, што кад заменимо у III даје $-4 + 2 = -3 + \lambda \cdot (-1)$, тј. $\lambda = -1$. Приметимо да смо овако добили и координате пресечне тачке $T(0, -3, -2)$, док смо првим начином само утврдили да се ове праве секу.

3. Како је $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right)^{-\frac{2n}{2n+1}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ то први сабирак $\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n$ конвергира ка e, па има само једну тачку нагомилавања која је исто e. Како је

$$\sin\frac{n\pi}{3} = \begin{cases} 0 & n=3k \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & n=6k+1,\ n=6k+2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & n=6k+4,\ n=6k+5 \end{cases},$$

то ће други сабирак $\sin\dfrac{n\pi}{3}$ имати 3 тачке нагомилавања:

0 (за $n=3k$), $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (за $n=6k+1$ и $n=6k+2$) и $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (за $n=6k+4$ и $n=6k+5$).

Стога низ (a_n) има тачке нагомилавања $\dfrac{1}{e}$, $\dfrac{1}{e}+A\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{1}{e}-A\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Конвергентан низ има само једну тачку нагомилавања, а то је могуће само за $A=0$. Тада је $a_n=\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^n$, а за тај низ смо већ видели да конвергира (тежи ка $\frac{1}{e}$).

4. Испитајмо ток функције $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}}$.

1° Домен је $D=(-\infty,1)$.
2° Нула је $N(0,0)$ и то је и пресек са y-осом. Знак: за $x\in(-\infty,0)$ је $f(x)>0$, а за $x\in(0,1)$ је $f(x)<0$.
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.
4° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.
Има вер.ас. праву $x=1$, нема косих ас, лева хор.ас. $y=0$.
5° $f'=\dfrac{-2+\ln(1-x)}{2(1-x)^{3/2}}$. Монотоност: $\nearrow\ \boxed{-e^2+1}\ \searrow\ 1\quad x$. Локални максимум је тачка $M(-e^2+1,\frac{2}{e})$.
6° $f''=\dfrac{-8+3\ln(1-x)}{4(1-x)^{5/2}}$. Конвексност: $\cup\ \boxed{-e^{8/3}+1}\ \cap\ 1\quad x$. Превојна тачка је $P\left(-e^{8/3}+1,\frac{8}{3e^{4/3}}\right)$.