I # Писмени испит из математике 1 **I**

18. јануар 2010.

I група

презиме и име студента **број индекса**

1. У зависности од реалног параметра a решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ 4x & + & ay & - & 2z & = & 8 \\ 2x & + & (2a-3)y & + & (a-4)z & = & 10-2a. \end{array}$$

2. Дате су једначине равни α и β:

$$\alpha\colon x+y-3z+1=0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 2x+2y-6z+3=0.$$

а) Одредити њихове векторе нормала $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Испитати узајамни положај равни α и β.

г) Уколико се равни α и β секу одредити једначину њихове пресечне праве p у канонском облику, а ако се не секу одредити растојање равни α и β.

3. а) Одредити Маклоренове полиноме другог степена функција

$$g_1(t) = \sqrt[4]{1+t}, \qquad g_2(x) = \cos 6x \qquad \text{и} \qquad g_3(x) = \sqrt[4]{\cos 6x}.$$

б) Израчунати:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{\cos 6x} - \sqrt[6]{\cos 4x}}{x^2}\,.$$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln\frac{x-3}{x+3}\,.$$

II Писмени испит из математике 1 II

18. јануар 2010.

II група

презиме и име студента **број индекса**

1. У зависности од реалног параметара b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & (b+5)y & - & (b+3)z & = & b-4 \\ 2x & + & 4y & + & bz & = & 3b+10 \\ x & + & 2y & - & (b+3)z & = & -3b-4 \end{array}$$

2. Дате су једначине равни α и β:

$$\alpha\colon x - y + 3z + 2 = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 2x - 2y + z + 4 = 0.$$

а) Одредити њихове векторе нормала $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Испитати узајамни положај равни α и β.

г) Уколико се равни α и β секу одредити једначину њихове пресечне праве p у канонском облику, а ако се не секу одредити растојање равни α и β.

3. а) Одредити Маклоренове полиноме другог степена функција

$$g_1(t) = \cos(t), \qquad g_2(x) = \ln(1+6x) \qquad \text{и} \qquad g_3(x) = \cos\big(\ln(1+6x)\big).$$

б) Израчунати:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\big(\ln(1+6x)\big) - \cos\big(\ln(1+4x)\big)}{x^2}\,.$$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln\frac{4-x}{4+x}\,.$$

III **Писмени испит из математике 1** III

18. јануар 2010.

III група

презиме и име студента | **број индекса**

1. Решити систем у зависности од реалног параметра c:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ -6x & + & cy & - & 3z & = & -4 \\ 6x & - & cy & + & (c-2)z & = & c+2 \end{array} .$$

2. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{1} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 3x - 2y + z - 6 = 0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ равни β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

г) Уколико се права a и раван β секу одредити величину угла φ између праве a и равни β, као и пресечну тачку M, а уколико се не секу одредити растојање између праве a и равни β.

3. а) Одредити Маклоренове полиноме другог степена функција

$$g_1(t) = \sqrt[6]{1+t}, \qquad g_2(x) = \sin(4x^2) \qquad \text{и} \qquad g_3(x) = \sqrt[6]{1-\sin(4x^2)}.$$

б) Израчунати:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[6]{1-\sin(4x^2)} - \sqrt[4]{1-\cos(6x^2)}}{x^2}.$$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$y(x) = \sqrt{e^{-x} - e}\,.$$

IV **Писмени испит из математике 1** IV

18. јануар 2010.

IV група

________________________________ ________________

презиме и име студента **број индекса**

1. Решити систем у зависности од реалног параметра d:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & + & 2w & = & 4 \\ 2x & + & 4y & + & (d^2+7)z & + & (5-d^2)w & = & 2d+6 \\ -3x & - & 6y & + & 9z & + & (d-7)w & = & -12 \end{array} .$$

2. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 2x - y + 2z + 6 = 0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ равни β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

г) Уколико се права a и раван β секу одредити величину угла φ између праве a и равни β, као и пресечну тачку M, а уколико се не секу одредити растојање између праве a и равни β.

3. **а)** Одредити Маклоренове полиноме другог степена функција

$$g_1(t) = \ln(1+t), \qquad g_2(x) = \cos 6x \qquad \text{и} \qquad g_3(x) = \ln(\cos 6x).$$

б) Израчунати:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 6x) - \ln(\cos 4x)}{x^2} .$$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{-e^{2x}}{1+2x} .$$

Решења III групе

1. Степенаст облик је

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & (c-3)y & & & = & 2 \\ & & & & (c-5)z & = & c-2. \end{array}$$

Одавде се добија да:

1° <u>за $c = 3$</u> друга једначина је $0 = 2$, па систем нема решења;

2° <u>за $c = 5$</u> трећа једначина је $0 = 3$, па систем нема решења;

3° <u>за $c \neq 3,\ c \neq 5$</u> систем има јединствено решење: $(x, y, z) = \left(\dfrac{c^2 - 9c + 14}{2c^2 - 16c + 30}, \dfrac{2}{c-3}, \dfrac{c-2}{c-5}\right)$.

Напомена. Систем се може одрадити и коришћењем детерминанти. Детерминанте су:

$\Delta = 2c^2 - 16c + 30 = 2(c-3)(c-5), \quad \Delta_x = c^2 - 9c + 14, \quad \Delta_y = 4c - 20 = 4(c-5), \quad \Delta_z = 2c^2 - 10c + 12 = 2(c-2)(c-3).$

<u>*Честе грешке*</u>:

- Несвођење на систем у степенастом облику него покушаји извлачења случајева из неког другог облика (нпр. случајеви $c = 2$ или $c = 4$, а недостаје неки од $c = 3$, $c = 5$ и $c \neq 3, 5$).
- Нетачна терминологија:
  - „Систем је немогућ“ (**погрешно**) уместо „Систем нема решења“ (**тачно**) или „Систем није сагласан“ (**тачно**).
  - „Систем је неодређен“ (**погрешно**) уместо „Систем има вишеструко решење које зависи од 1 параметра“ (**тачно**).

  Систем је увек могућ, само је питање да ли има или нема решења. Такође код система ништа није неодређено (систем је у потпуности одређен својим једначинама), а код случаја вишеструког решења и оно је потпуно одређено у функцији од параметара.
- Код квадратне функције је $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Често се заборави a, што даје нетачно решење.
- Мешање ознака за матрице и детерминанте! За матрице може:

  $$(a_{ij})_{m\times n} \qquad \text{или} \qquad ||a_{ij}||_{m\times n} \qquad \text{или} \qquad [a_{ij}]_{m\times n}.$$

  За детерминанте се користи само следећа ознака:

  $$|a_{ij}|,$$

  при чему то мора бити детерминанта од квадратне матрице $n \times n$.
- Непрецизан запис решења, попут

  $$\mathcal{R}_p = \left\{ \left(\frac{8-6p}{5}, \frac{-6+2p}{5}, p \right) \mid p \in \mathbb{R} \right\}.$$

  Боље (и тачније) је записати као

  $$(x, y, z) \in \left\{ \left(\frac{8-6p}{5}, \frac{-6+2p}{5}, p \right) \mid p \in \mathbb{R} \right\}$$

  јер се тада тачно види чему је једнако x, чему y и чему z.

2.

$$a\colon \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{1} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 3x - 2y + z - 6 = 0.$$

а) $\vec{v}_a = (3,2,1)$ и $\vec{n}_\beta = (3,-2,1)$.

б) Нпр. $A(-1,0,-5)$ и $P(0,0,6)$.

в) Права a и раван β нису паралелне јер вектори $\vec{v}_a$ и $\vec{n}_\beta$ нису ортогонални ($\vec{v}_q \cdot \vec{n}_\pi = 6 \neq 0$), па се секу (у тачки).

г) За угао имамо да важи $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{v}_a \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{v}_a| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \dfrac{3}{7}$, па је $\varphi = \arcsin\dfrac{3}{7}$.

Пресечну тачку M добијамо када параметарски облик једначине праве a

$$a\colon x = 3t-1, \quad y = 2t, \quad z = t-5,$$

уврстимо у једначину равни β:

$$\beta\colon 3(3t-1) - 2\cdot 2t + (t-5) - 6 = 0,$$

тј. $6t - 14 = 0$, одакле добијамо $t = \dfrac{7}{3}$, што даје $M(6, \frac{14}{3}, \frac{-8}{3})$.

3. **а)** Макоренови развоји су $g_1(t) = \sqrt[6]{1+t} = 1 + \binom{1/6}{1}t - \binom{1/6}{2}t^2 + o(t^2) = 1 + \frac{1}{6}t - \frac{5}{72}t^2 + o(t^2)$, $g_2(x) = \sin 4x^2 = 4x^2 + o(x^2)$, $g_3(x) = \sqrt[6]{1-\sin^2 4x} = 1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$, одакле добијамо одговарајуће Маклоренове полиноме (који се траже!) $T_1(t) = 1 + \frac{1}{6}t - \frac{5}{72}t^2$, $T_2(x) = 4x^2$, $T_2(x) = 1 - \frac{2}{3}x^2$.

б) Овај лимес уопште **НИЈЕ** облика $\frac{0}{0}$ да бисте користили Лопиталово правило или Маклоренове развоје. Стога се он ради на следећи начин:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[6]{1-\sin(4x^2)} - \sqrt[4]{1-\cos(6x^2)}}{x^2} = \left[\frac{\sqrt[6]{1} - \sqrt[4]{1-1}}{0^+} = \frac{1-0}{0^+}\right] = +\infty\,.$$

4. Функција
$$y(x) = \sqrt{e^{-x} - e}\,.$$

1° Домен је $D_y = (-\infty, -1]$.

2° Нула је за $x = -1$. Знак: за све **остале** вредности је $y > 0$. Пресек са y-осом нема јер $0 \notin D_y$.

3° Није ни парна ни непарна (јер домен D_y није симетричан у односу на $x = 0$), ни периодична (јер се нуле не понављају периодично).

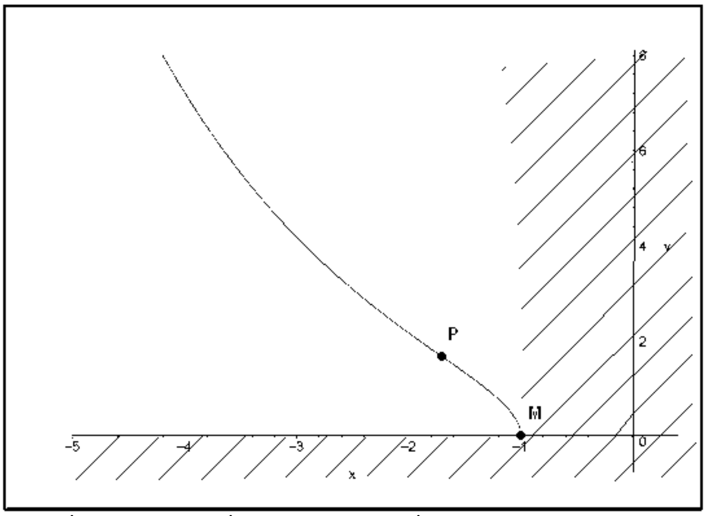
4° $y(-1) = 0 \Rightarrow$ права $x = -1$ није вертикална асимптота.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = +\infty \;\Rightarrow$ нема леву хоризонталну асимптоту.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{y(x)}{x} = -\infty$ (треба 1 Л.П.) $\;\Rightarrow$ нема леву косу асимптоту.

5° $y' = \dfrac{-e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x} - e}}$. Монотоност: $\searrow (-1)$ x. Локални минимум је $M(-1, 0)$.

6° $y'' = \dfrac{e^{-x}(e^{-x} - 2e)}{4(e^{-x})^{3/2}}$. Конвексност: $\cup\, [-\ln 2 - 1]\, \cap (-1)$ x. Превојна тачка је $P(-\ln 2 - 1, \sqrt{e}\,)$.



Из <u>*мноштва грешака*</u> издвајамо неке које су се често јављале.

- За парност **не треба** одређивати $y(-x)$.
- Функција није увек позитивна, јер је $y(-1) = 0$.
- Због тога што је домен $D_y = (-\infty, -1]$ не треба тражити лимесе попут $\lim\limits_{x\to1^+} y(x)$, као $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$. Такође за $x = -1$ функција је дефинисана, па не тражимо граничну вредност $\lim\limits_{x\to1^-} y(x)$, него вредност функције $y(-1)$!
- Функција има локални екстрем: то је минимум $M(-1, 0)$. То јесте најмања вредност у својој околини, тако да је то локални минимум!
- Само **један** студент је урадио тачно нуле другог извода! Разломак је једнак 0 када је бројилац (оно горе) једнак 0, тј. добијамо $e^{-x}(e^{-x} - 2e) = 0$. Производ је једнак 0 ако је неки од чинилаца једнак 0, тј. $e^{-x} = 0$ (што је **НИКАД** јер је експоненцијална функција увек позитивна) или $e^{-x} - 2e = 0$:
$$e^{-x} - 2e = 0 \;\Rightarrow\; e^{-x} = 2e = e^{\ln 2} \cdot e^{1} = e^{\ln 2 + 1} \;\Rightarrow\; -x = \ln 2 + 1 \;\Rightarrow\; x = -1 - \ln 2.$$
Сада остаје још да одредимо превојну тачку:
$$y(-1 - \ln 2) = \sqrt{e^{-(-1-\ln 2)} - e} = \sqrt{e^{1+\ln 2)} - e} = \sqrt{e^{1} \cdot e^{\ln 2} - e} = \sqrt{e \cdot 2 - e} = \sqrt{e},$$
одакле је $P(-\ln 2 - 1, \sqrt{e}\,)$.
- Иако нисте све испитали, скицирајте график (и нетачан график који личи донеће вам који поен!). Цртање графика се ради **истовремено** са испитивањем тока, тако да већ након 1° и 2° крећете са скицирањем графика!