ПРАВИЛА ЗА ПОЛАГАЊЕ ИСПИТА ИЗ НУМЕРИЧКЕ АНАЛИЗЕ У ТОКУ СЕМЕСТРА

1. Испит се састоји из **писменог** и **усменог** дела. Писмени део испита је **елиминаторан**.

2. Активности у току семестра могу бити **обавезне** и **опционе**, а одвијају се у две фазе.

3. **Прва фаза** почиње са почетком летњег семестра и завршава са са завршетком наставе.

4. **Друга фаза** почиње са завршетком наставе и завршава се са термином усменог испита у јунском испитном року.

5. Преглед активности по фазама дат је у Табели 1.

ФАЗА	АКТИВНОСТ	
	обавезна	**опциона**
Прва фаза	Писмени испит Први део усменог испита	Семинарски рад Домаћи рад Тема 8
Друга фаза		Други део усменог испита

Табела 1: Активности у току семестра

ПИСМЕНИ ИСПИТ

- Да би стекао право да усмени део испита полаже у току семестра, студент је обавезан да положи елиминациони задатак из Теме 1 у Табели 2.
- Остале теме су алтернативне: Т2 и Т7, Т3 и Т4, Т5 и Т6. Студент бира по једну (укупно три) од алтернативних тема.
- **Минималан број поена:** 32 (8 из Т1 + по 8 из **три по избору** теме од Тема 2-7).
- **Максималан број поена:** 38 (8 из Т1 + по 10 из одабраних тема у а2))

Редни број	Тема (Т)	Начин полагања	Број поена
1	Приближни бројеви и грешке функције	писмено	8
2	Нелинеарне једначине	софтвер	8-10
3	Системи линеарних једначина	софтвер	8-10
4	Системи нелинеарних једначина	софтвер	8-10
5	Полиномска интерполација	софтвер	8-10
6	Апроксимација функција	софтвер	8-10
7	Нумеричко диференцирање и интеграција	софтвер	8-10
8	Диференцијалне једначине	софтвер	6-8

Табела 2: Теме за полагање испита

- **Студент је положио писмени испит** ако је освојио најмање минималан број поена.
- Положени писмени испит важи у текућој школској години.

ПРВИ ДЕО УСМЕНОГ ИСПИТА

- Полажу се уводна питања из **три** од преосталих (у односу на писмени део испита) алтернативних тема из Табеле 2.
- Питања су формулисана у складу са Упутством за припрему уводних питања.
- Полагање се врши на посебним обрасцима за сваку тему.
- **Максималан** број поена на једном обрасцу је 6.
- Студент је положио први део усменог испита ако је освојио **најмање** 8 од могућих 18 поена и на свакој од три полагане теме има освојен позитиван број поена.

СТУДЕНТ ЈЕ ПОЛОЖИО ИСПИТ АКО ЈЕ ПОЛОЖИО ПИСМЕНИ ИСПИТ И ПРВИ ДЕО УСМЕНОГ ИСПИТА

СЕМИНАРСКИ РАД

- Семинарски рад може бити један проблем или задатак из поглавља **Проблеми, задаци и коментари** важећег уџбеника или један задатак из поглавља **Задаци за вежбу** важеће збирке задатака.
- Семинарски рад се вреднује са 2 поена ако је из категорије 'лакши', са 4 поена ако је из категорије 'средњи' и са 6 поена ако је из категорије 'тежи'.
- Категорију семинарског рада бира студент приликом пријаве рада.
- Семинарски радови предају се у штампаној форми, а затим се бране усмено у термину консултација предметног наставника.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- Домаћи задатак се односи на једну теорему која је у важећем уџбенику наведена без доказа, са упућивањем на литературу.
- Изузетно, домаћи рад може да буде и теорема или проблем који није наведен у уџбенику.
- Домаћи задатак се вреднује са максимално 6 поена.
- Домаћи задатак се брани усмено у термину консултација предметног наставника.

ТЕМА 8

- Студент полаже тему Т8 из Табеле 2.
- Полагање се врши на исти начин као и полагање алтернативних тема у оквиру писменог испита (софтвер).
- За положену Т8 студент добија 6, 7 или 8 поена.

УКУПАН БРОЈ ПОЕНА (УП) после завршене прве фазе рачуна се по формули

$$\boxed{\text{УП}=(\text{П}+\text{У1})*\ 1.25+\text{С}+\text{Д}+\text{Т8}}$$

где је

П - број поена на писменом делу испита

У1 - број поена на првом делу усменог испита
С - број поена за семинарски рад
Д - број поена за домаћи рад
Т8 - број освојених поена за Тему 8

После прве фазе, оцена за положени испит изводи се према следећој табели.

УП	[50-59]	[60-70]	[71-80]	[81-90]	[91-100]
Оцена	6	7	8	9	10

ДРУГИ ДЕО УСМЕНОГ ИСПИТА

- Студент наставља да полаже две од три теме које је полагао на првом делу усменог испита. Избор тема врши студент.
- У оквиру изабраних тема полажу се теореме (исказ са доказом теореме). У обзир долазе:
  а. теореме из уџбеника које су доказане на предавању;
  б. теореме из уџбеника које нису доказане на предавању, а имају доказ у уџбенику.
- Студент полаже:
  - једну теорему из групе (а), ако поправља оцену за један;
  - једну теорему из групе (а) и једну теорему из групе (б), ако поправља оцену за два.
- За положену теорему из било које групе студент добија 6, 7, 8, 9 или 10 поена.
- Полагање је усмено, са дозвољеном употребом **штампане** литературе.

КОНАЧАН БРОЈ ПОЕНА (КП) после завршене друге фазе рачуна се по формули

$$\boxed{\text{КП}=\text{УП}+\text{У2}}$$

где је У2 број поена на другом делу усменог испита.

ЗАВРШНА ОЦЕНА се добије када се број поена (УП) у претходној табели замени са (КП).

УПУТСТВО ЗА ПРИПРЕМУ УВОДНИХ ПИТАЊА

Нелинеарне једначине

1. Етапе у нумеричком решавању једначине $f(x) = 0$.
2. Дефинисати и графички интерпретирати интервал изолације корена једначине $f(x) = 0$.
3. Довољан услов за егзистенцију корена једначине $f(x) = 0$ на интервалу (a, b).
4. Довољан услов за егзистенцију и јединственост корена једначине $f(x) = 0$ на интервалу (a, b).
5. Карактеристика итеративних метода за решавање нелинеарне једначине $f(x) = 0$.
6. Ред конвергенције итеративне методе. Специјални случајеви ($p = 1, 2, \ldots$).
7. Метода половљења интервала. Геометријска интерпретација и формула за итеративни низ.
8. Њутнова метода. Геометријска интерпретација. Формула за итеративни низ.
9. Навести довољне услове за конвергенцију Њутнове методе.
10. Брзина конвергенције Њутнове методе. Извођење формуле

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} |\xi - x_{n-1}|^2.$$

11. Грешка Њутнове методе. Извођење формуле

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2. \tag{1}$$

12. Извођење формуле за итеративни низ методе сечице.
13. Метода *regula falsi*. Геометријска интерпретација и формула за итеративни низ.
14. Једнокорачна *regula falsi*. Геометријска интерпретација и формула за итеративни низ. Услови за избор x_0 и x_f.
15. Метода итерације. Трансформација једначине $f(x) = 0$ и формула за итеративни низ. Геометријска интерпретација конвергентног случаја.
16. Кључни услов за конвергенцију методе итерације.
17. Извођење формуле за апостериорну грешку методе итерације.
18. Поређење нумеричких метода за решавање нелинеарних једначина у односу на брзину конвергенције.

Системи линеарних једначина

1. Записи система од n линеарних једначина са n непознатих у скаларном и векторском облику.
2. Класификација метода за решавање система линеарних једначина. Карактеристика итеративних метода.
3. Дефиниција норме вектора.
4. Примери векторских норми у $\boldsymbol{R}^n$.
5. Рачунање векторских норми. Примери.
6. Дефиниција растојања у нормираном простору.
7. Рачунање растојања у простору $\boldsymbol{R}^n$ у различитим нормама. На пример, израчунати $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ у норми $\|\cdot\|_\infty$ ако је $\boldsymbol{x} = (2, -1, 0, 4)$, $\boldsymbol{y} = (-1, 5, 1, -2)$.
8. Дефиниција конвергентног низа у нормираном простору.
9. Дефиниција матричне норме.
10. Примери матричних норми у простору $\mathcal{M}_n$.
11. Рачунање матричних норми.Примери.
12. Дефиниција сагласности матричне норме датој векторској норми.
13. Навести матричне норме које су сагласне редом векторским нормама $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ и$\|\cdot\|_2$.
14. Индукована матрична норма. Дефиниција и особине.
15. Коју матричну норму индукује:

- апсолутна векторска норма,
- еуклидска векторска норма,
- униформна векторска норма?

Написати те норме.
16. Дефиниција сопствених вредности и сопствених вектора матрице.
17. Карактеристична једначина матрице.
18. Дефинициоја спектра матрице. Примери.
19. Дефиниција спектралног радијуса матрице. Примери.
20. Опис методе просте итерације. Формула за итеративни низ у векторском и скаларном облику.
21. Навести потребан и довољан услов конвергенције методе просте итерације.
22. Испитивање конвергенције итеративног процеса на конкретним примерима (видети Пример 3.9 у уџбенику на стр. 69).
23. Навести довољан услов конвергенције методе просте итерације.
24. Дефиниција дијагоналне доминантности матрице. Написати услове дијагоналне доминантности за квадратне матрице реда $n = 3, 4, \ldots$.

25. Извести формулу за итеративни низ Јакобијеве методе.
26. Навести довољан услов конвергенције Јакобијеве методе.
27. Реализација идеје Гаус-Зајделове методе на конкретним случајевима. На пример, помоћу којих компоненти се рачуна $x_5^{(3)}$ (непозната x_5 у трећој итерацији) ако систем линеарних једначина има девет непознатих $x_1, \ldots, x_9$?
28. Извести формулу за итеративни низ Гаус-Зајделове методе.
29. Навести два довољна услова конвергенције Гаус-Зајделове методе.

Системи нелинеарних једначина

1. Скаларни и векторски запис система нелинеарних једначиона.
2. Дефиниција контракције за пресликавање $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{D} \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{D}$.
3. Дефиниција Јакобијеве матрице пресликавања $\boldsymbol{F}$ у тачки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$.
4. Одређивање Јакобијеве матрице за конкретна пресликавања. На пример, за пресликавање

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + xy^3 - 1 \\ x \sin^2 y \end{bmatrix}.$$

5. Дефиниција Хесијанове матрице (хесијана) пресликавања $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$.
6. Одређивање Хесијанове матрице за конкретна пресликавања. На пример, за пресликавање $f : (x, y, z) \mapsto x \sin y + 2x^3y^2 - \ln(1 + x^2)$.
7. Метода итерације. Извођење формуле за итеративни низ у скаларном и векторском облику.
8. Ако је пресликавање $\boldsymbol{G}$ дефинисано на лопти $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leq r\}$, навести довољне услове конвергенције методе итерације.
9. Ако су испуњени довољни услови конвергенције методе итерације, навести формулу за оцену грешке n-те итерације.
10. Извођење формуле за итеративни низ методе Њутн-Канторовича.
11. Навести итеративни низ за једну модификацију методе Њутн-Канторовича.

Полиномска интерполација

1. Скицирати график интерполационог полинома функције f која је задана вредностима у чворовима $x_0, \ldots, x_n$. Размотрити специјалне случајеве када је $n = 2, 3, \ldots$. За сваки од ових случајева одредити степен интерполационог полинома.
2. Који проблем се решава интерполацијом функције f функцијом g? Навести интерполационе услове за функцију g.
3. Написати израз за Лагранжов интерполациони полином за три, че-

тири,... чвора.
4. Извести формулу за Лагранжов интерполациони полином.
5. Дефинисати грешку полиномске интерполације и интерпретирати је графички.
6. Написати израз за: а) грешку б) оцену грешке полинономске интерполације ако $f \in C^{(n+1)}[a, b]$.
7. Дефиниција подељене разлике k-тог реда у чвору x_i. Написати одговарајуће дефиниције за конкретне случајеве, нпр. за

$$f[x_0, x_1], f[x_1, x_2], ..., f[x_0, x_1, x_2], f[x_1, x_2, x_3] \ldots$$

8. Написати израз за везу између подељене разлике и вредности функције у чворовима $x_0, \ldots, x_n$. Изразити дату подељену разлику преко вредности функције у чворовима, нпр.

$$f[x_0, x_1], f[x_1, x_2], ..., f[x_0, x_1, x_2], f[x_1, x_2, x_3] \ldots$$

9. Написати израз за Њутнов интерполациони полином са базним чвором x_0.
10. Написати израз за Њутнов интерполациони полином са базним чвором x_n.
11. Дефинисати коначну разлику k-тог реда функције f у тачки x. Специјално, дефинисати коначне разлике $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x), \ldots$.
12. Дефинисати коначну разлику k-тог реда функције f у чвору x_i. Специјално, дефинисати коначне разлике Δy_0, $\Delta y_1, \ldots, \Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1 \ldots$.
13. Навести везу између подељених и коначних разлика k-тог реда у чвору x_i. Размотрити специјалне случајеве

$$f[x_0, x_1], f[x_1, x_2], ..., f[x_0, x_1, x_2], f[x_1, x_2, x_3] \ldots$$

14. Написати израз за први Њутнов интерполациони полином са еквидистантним чворовима у односу на промењљиву s. Навести везу између x и s.
15. Извести формулу за први Њутнов интерполациони полином са еквидистантним чворовима.
16. Навести апроксимативну везу између n-тог извода фунције f у чвору x_i и одговарајуће коначне разлике. Написати израз за апроксимативну грешку првог Њутновог интерполационог полинома.
17. Написати израз за други Њутнов интерполациони полином са еквидистантним чворовима у односу на промењљиву s. Навести везу између x и s.
18. Који се проблем решава инверзном интерполацијом? Навести један интерполациони полином функције f^{-1} који се користи у инверзној интерполацији.