POLINOMSKA INTERPOLACIJA

Maj, 2013

Problem aproksimacije funkcije

Pretpostavimo da su poznate vrednosti funkcije f u konačnom broju tačaka $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$,

x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Potrebno je odrediti vrednost funkcije f u tački $x \in [a, b]$ koja je različita od bilo koje tačke x_i.

Funkciju f zamenjujemo funkcijom g,

$$f(x) \approx g(x)$$

f - aproksimirajuća funkcija
g - aproksimaciona funkcija
Ako je

$$g(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n \tag{1}$$

funkcija g naziva se interpolaciona funkcija

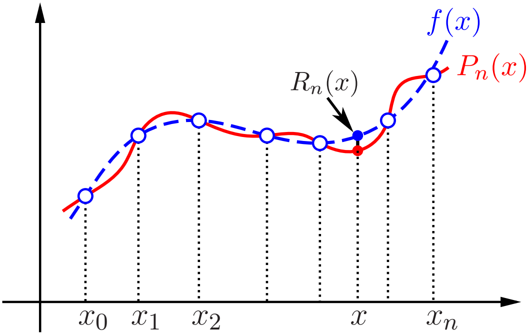
$x_0, \ldots, x_n$ - čvorovi interpolacije
$[a, b]$ - interval interpolacije

Polinomska interpolacija

Ako je

$$g(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad (2)$$

interpolacija je polinomska



Teorema: Postoji jedinstven polinom oblika (2), stepena ne većeg od n, koji zadovoljava interpolacione uslove

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n. \tag{3}$$

Dokaz: knjiga!

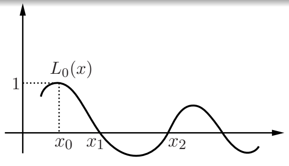
Lagranžov interpolacioni polinom

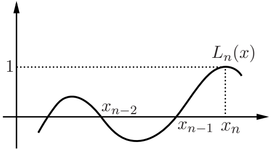
Interpolacioni polinom $P_n(x)$ tražimo u obliku linearne kombinacije polinoma $L_0(x), \ldots, L_n(x)$,

$$P_n(x) = f(x_0)L_0(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x), \tag{4}$$

gde su $L_k(x)$, $k = 0, \ldots, n$ nepoznati polinomi koje odredjujemo iz uslova da su stepena ne vec1eg od n i da zadovoljavaju uslove

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } j \neq k \\ 1 & \text{ako je } j = k. \end{cases} \tag{5}$$





$$L_k(x) = A_k(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n) \qquad (6)$$

$$L_k(x_k) = 1 \Rightarrow$$

$$A_k = \frac{1}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

LIP: $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Forme zapisa LIP koje koriste funkciju

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n) :$$

1. $$P_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k) \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)}, \tag{7}$$

2. $$P_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x), \quad x \in [a, b] \tag{8}$$

Teorema: Ako $f \in C^{(n+1)}[a, b]$, onda za svako $x \in [a, b]$ postoji tachka $\xi_x \in [a, b]$ takva da je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\, \omega_{n+1}(x). \tag{9}$$

Dokaz:

1. $x = x_k \Rightarrow R_n(x_k) = 0, \quad k = 0, \ldots, n$
2. $x \neq x_k$: uvedimo funkciju

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - K\omega_{n+1}(t), \quad K \in \mathbf{R} \tag{10}$$

Važi:

$$g(x_k) = R_n(x_k) - K\omega_{n+1}(x_k) = 0, \quad k = 0, \ldots, n$$

za bilo koju vrednost konstante **K**.

Odaberimo **K** tako da je i x nula funkcije g,

$$f(x) - P_n(x) - K\omega_{n+1}(x) = 0 \Rightarrow K = \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega_{n+1}(x)} \tag{11}$$

Funkcija g ima $n+2$ nule na $[a, b]$: $x_0, \ldots, x_n$ i x

Rolova teorema:

- g' ima bar $n+1$ nulu na $[a, b]$

  $\vdots$

- $g^{(n+1)}$ ima bar jednu nulu na $[a, b]$

Postoji tačka $\xi_x \in [a, b]$ takva da je

$$g^{(n+1)}(\xi_x) = 0.$$

Kako je

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K(n+1)!,$$

sledi da je

$$f^{(n+1)}(\xi_x) - K(n+1)! = 0,$$

odnosno

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}. \tag{12}$$

Iz (11) i (12) sledi da je

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{\omega_{n+1}(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},$$

pa je

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x). \tag{13}$$

Njutnovi interpolacioni polinomi sa neekvidistantnim čvorovima

Podeljene razlike

Definicija: Pod podeljenom razlikom nultog reda u čvoru x_i podrazumeva se vrednost funkcije f u čvoru x_i,

$$f[x_i] = f(x_i).$$

Podeljena razlika prvog reda funkcije f u čvoru x_i je količnik

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Podeljena razlika k-tog reda funkcije f u čvoru x_i definiše se pomoću podeljenih razlika $(k-1)$-vog reda,

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Lema: Važi jednakost

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}. \tag{14}$$

Na primer

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

Osobine podeljenih razlika:

1. Operator podeljenih razlika f je linearan,

   $$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)[x_0, \ldots, x_k] = \alpha_1 f_1[x_0, \ldots, x_k] + \alpha_2 f_2[x_0, \ldots, x_k].$$

2. Podeljene razlike su simetrične funkcije svojih argumenata. Podeljena razlika $f[x_0, \ldots, x_k]$ ostaje nepromenjena pri bilo kojoj permutaciji argumenata $x_0, \ldots, x_k$.

Teorema: Ako $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ i ako su $x_0, \ldots, x_n$ različite tačke odsečka $[a, b]$, onda je

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \tag{15}$$

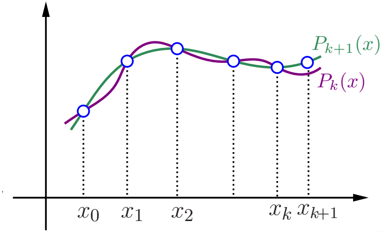
interpolacioni polinom funkcije f na odsečku $[a, b]$.

Dokaz:

$$P_n(x) = P_0(x) + [P_1(x) - P_0(x)] + [P_2(x) - P_1(x)] + \cdots + [P_n(x) - P_{n-1}(x)] \tag{16}$$

Svaki od interpolacionih polinoma P_k zadovoljava uslove

$$P_k(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, k \tag{17}$$



Pod $P_0(x)$ se podrazumeva interpolacioni polinom stepena ne većeg od nula za koji je $P_0(x_0) = f(x_0)$. Ove uslove ispunjava jedino polinom nultog stepena,

$$P_0(x) = f(x_0). \tag{18}$$

Za svako $k = 0, \dots, n-1$ razlika $P_{k+1}(x) - P_k(x)$ je polinom $(k+1)$-vog stepena čije su nule čvorovi $x_0, \dots, x_k$, pa je

$$P_{k+1}(x) - P_k(x) = a_{k+1}(x - x_0)\cdots(x - x_k) = a_{k+1}\omega_{k+1}(x), \tag{19}$$

gde je a_{k+1} neodredjena konstanta. Kako je

$$P_{k+1}(x_{k+1}) = f(x_{k+1}),$$

iz (19) sledi

$$f(x_{k+1}) - P_k(x_{k+1}) = a_{k+1}\omega_{k+1}(x_{k+1}). \tag{20}$$

S druge strane, korišćenjem Lagranžovog interpolacionog polinoma u formi (7) i formule (14), dobijamo

$$f(x) - P_k(x) = f(x) - \omega_{k+1}(x) \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x - x_i) \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

$$= \omega_{k+1}(x) \left(\frac{f(x)}{(x - x_0) \cdots (x - x_k)} + \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i - x) \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)} \right)$$

$$= \omega_{k+1}(x) f[x, x_0, \ldots, x_k].$$

Iz dobijene relacije i osobine simetrije podeljenih razlika sledi

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - P_k(x_{k+1}) &= \omega_{k+1}(x_{k+1}) f[x_{k+1}, x_0, \ldots, x_k] \\ &= \omega_{k+1}(x_{k+1}) f[x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}]. \qquad (21) \end{aligned}$$

Iz relacija (20) i (21) dobijamo da je

$$a_{k+1} = f[x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}], \tag{22}$$

pa je

$$P_{k+1}(x) - P_k(x) = f[x_0, \ldots, x_{k+1}]\omega_{k+1}(x), \quad k = 0, \ldots, n-1$$

odnosno

$$\begin{aligned} P_1(x) - P_0(x) &= f[x_0, x_1](x - x_0), \\ P_2(x) - P_1(x) &= f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1), \\ &\vdots \\ P_n(x) - P_{n-1}(x) &= f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{23}$$

Iz (18) i (23) neposredno sledi (15).

Napomena:

Ako se umesto x_0 za bazni čvor uzme x_n, dobija se još jedna forma zapisa interpolacionog polinoma,

$$P_n(x) = f(x_n)+f[x_n, x_{n-1}](x-x_n)+\cdots+f[x_n, \dots, x_0](x-x_n)\cdots(x-x_1),$$

odnosno

$$P_n(x) = f(x_n)+f[x_{n-1}, x_n](x-x_n)+\cdots+f[x_0, \dots, x_n](x-x_n)\cdots(x-x_1). \tag{24}$$

Njutnovi interpolacioni polinomi sa ekvidistantnim čvorovima

Definicija Za skup čvorova $x_0, \ldots, x_n$ se kaže da su **ekvidistantni**, odnosno da obrazuju **ekvidistantnu (uniformnu, ravnomernu)** mrežu ako je

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, \ldots, n$$

za neko $h > 0$. Konstanta h se naziva **korak mreže**.

Interpolacioni polinomi sa ekvidistantnim čvorovima mogu se dobiti iz interpolacionih polinoma sa neekvidistantnim čvorovima.

Konačne razlike

Definicija: Konačna razlika prvog reda funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ u tački x je izraz

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x),$$

gde je $h > 0$.

Za $k = 2, 3, \ldots$, konačna razlika *k-tog reda* funkcije f u tački x je konačna razlika prvog reda konačne razlike $(k-1)$-vog reda u toj tački,

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)).$$

Oznake: $y_i = f(x_i), \quad \Delta^k y_i = \Delta^k f(x_i)$

Konačne razlike u čvorovima ekvidistantne mreže:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i, \\ \Delta^2 y_i &= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \\ &\vdots \\ \Delta^k y_i &= \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i. \end{aligned}$$

Naredna lema govori o vezi izmedju podeljenih i konačnih razlika.

Lema: Neka je $x_{i+k} = x_i + kh$ za fiksirano i i za $k = 1, \dots, n$. Tada je

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k y_i}{k! h^k} \tag{25}$$

za svako $k = 1, \dots, n$.

Prvi Njutnov interpolacioni polinom sa ekvidistantnim čvorovima

Uzevši u obzir (25), izraz za Njutnov interpolacioni polinom (15) postaje

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \tag{26}$$

Neka je $(x - x_0)/h = s$. Tada je

$$x - x_k = x - (x_0 + kh) = sh - kh = (s - k)h \tag{27}$$

za bilo koje $k = 0, \dots, n - 1$.

Iz (26) i (27) sledi

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = y_0 + \Delta y_0 s + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} s(s-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} s(s-1)\cdots(s-n+1). \tag{28}$$

Polinom (28) je prvi Njutnov interpolacioni polinom sa ekvidistantnim čvorovima.

Kako je

$$\omega_{n+1}(x) = \omega_{n+1}(x_0 + sh) = h^{n+1} s(s-1)\cdots(s-n),$$

iz opšte formule za grešku interpolacionog polinoma sledi da je

$$R_n(x) = R_n(x_0 + sh) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} h^{n+1} s(s-1)\cdots(s-n). \tag{29}$$

greška prvog Njutnovog interpolacionog polinoma.

Ako $f \in C^{(n+1)}[a, b]$, iz (29) sledi ocena

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} |s(s-1)\cdots(s-n)|. \tag{30}$$

Na osnovu aproksimacije

$$f^{(n)}(x_i) \approx \frac{\Delta^n y_i}{h^n}$$

dobija se aproksimativna ocena greške interpolacione formule (28),

$$|R_n(x)| \approx \frac{\max\limits_i |\Delta^{n+1} y_i|}{(n+1)!} |s(s-1)\cdots(s-n)|.$$

Drugi Njutnov interpolacioni polinom sa ekvidistantnim čvorovima

Ova forma interpolacionog polinoma dobija se iz oblika (24). Naime, uvodjenjem smene $(x - x_n)/h = s$, dobija se

$$x - x_{n-k} = x - (x_n - kh) = (s + k)h$$

za $k = 0, \dots, n-1$ pa, na osnovu (24) i (25), imamo

$$P_n(x) = P_n(x_n + sh) = y_n + \Delta y_{n-1} s + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} s(s+1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} s(s+1) \cdots (s+n-1). \tag{31}$$

Ovo je drugi Njutnov interpolacioni polinom sa ekvidistantnim čvorovima.

Za interpolacioni polinom (31) važi ocena greške

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} |s(s+1)\cdots(s+n)|,$$

kao i aproksimativna ocena

$$|R_n(x)| \approx \frac{\max_i |\Delta^{n+1} y_i|}{(n+1)!} |s(s+1)\cdots(s+n)|.$$

Inverzna interpolacija

- Rešava se problem nalaženja približne vrednosti argumenta x koja odgovara unapred datoj vrednosti y tablično zadane funkcije f.
- Da bi se obezbedila jednoznačna rešivost problema, pretpostavlja se da je funkcija f strogo monotona u odnosu na sve tablično zadane vrednosti
- Time je obezbedjena egzistencija inverzne funkcije $x = f^{-1}(y)$.

Problem inverzne interpolacije rešava se konstrukcijom interpolacionog polinoma $P_n(y)$ funkcije $x = f^{-1}(y)$:

- Lagranžov:

$$P_n(y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(y - y_0)\cdots(y - y_{i-1})(y - y_{i+1})\cdots(y - y_n)}{(y_i - y_0)\cdots(y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1})\cdots(y_i - y_n)} x_i,$$

- Njutnov:

$$P_n(y) = x_0 + f^{-1}[y_0, y_1](y - y_0) + \cdots$$
$$+ f^{-1}[y_0, \ldots, y_n](y - y_0) \cdots (y - y_{n-1}).$$

Ako je funkcija f zadana na skupu ekvidistantnih čvorova, problem inverzne interpolacije može se rešavati pomoću Njutnovih interpolacionih polinoma sa ekvidistantnim čvorovima.

Videti udžbenik, str. 113!